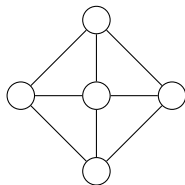
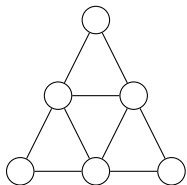


Chordaaliset verkot

November 17, 2017

Määritelmä

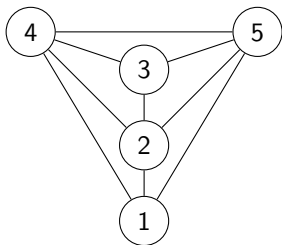
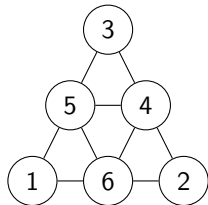
- ▶ Chordaalisen verkon jokaisessa syklissä jossa on vähintään 4 solmua on chord, eli kaari joka yhdistää kaksi ei peräkkäistä syklin solmua



Vasen verkko on chordaalinen, oikea ei ole

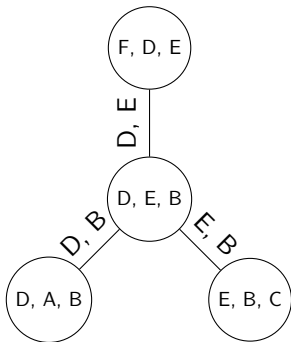
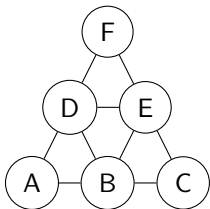
Määritelmä 2

- ▶ Verkko on chordaalinen jos ja vain jos sillä on täydellinen eliminaatiojärjestys
- ▶ Täydellinen eliminaatiojärjestys on järjestys jossa solmut voidaan poistaa niin että poistettavan solmun naapurusto on aina klikki
- ▶ Täydellisen eliminaatiojärjestyksen voi löytää (tai todistaa ettei sitä ole olemassa) $O(n + m)$ ajassa toimivalla algoritmilla



Määritelmä 3

- ▶ Verkko on chordaalinen jos ja vain jos kaikki sen minimaaliset separaattorit on klikkejä
- ▶ Chordaalisten verkkojen rakenne on klikkipuu, jonka solmut vastaavat maksimaalisia klikkejä ja kaaret vastaavat minimaalisia separaattoreita



Helppoja ongelmia

- ▶ Monet yleisissä verkoissa NP-kovat ongelmat ovat helppoja ratkaista jos verkko on chordaalinen
- ▶ Esim. suurin itsenäinen joukko, väritys ja suurin klikki voidaan ratkaista täydelliseen eliminaatiojärjestykseen perustuvalla ahneella algoritmilla

Täydellisen eliminaatiojärjestyksen löytäminen

- ▶ Wikipedia mainitsee algoritmin *Lexicographic breadth-first search* mutta kannattaa käyttää algorimia *Maximum cardinality search*

ALGORITHM 1: Maximum cardinality search

```
1 Input: graph  $G = (V, E)$ 
2  $P_v = 0$  for all  $v \in V$ 
3  $Q = V$ 
4 for  $i = |V|$  to 1 do
5      $v = v \in Q$  with highest  $P_v$ 
6      $O_i = v$ 
7      $Q = Q \setminus \{v\}$ 
8     foreach  $u \in neighbors(v)$  do
9          $P_u = P_u + 1$ 
10    end
11 end
12 return  $O$ 
```

Puudekompositio

- ▶ Chordaalisten verkkojen klikkipuilla on kivoja algoritmisia ominaisuuksia, varsinkin jos klikit ovat pieniä
- ▶ Halutaan löytää klikkipuita vastaavia rakenteita myös ei-chordaalille verkoille
- ▶ Puudekompositio on klikkipuuta vastaava yleisempi käsite
- ▶ Puudekomposition tekeminen vastaa kaarien lisäämistä niin että verkosta tulee chordaalinen
- ▶ Suurimman bagin koko - 1 on puuleveys
- ▶ Pienimmän puudekomposition puuleveys on verkon puuleveys

Puudekomposition sovelluksia

- ▶ Yleistää dynaamisen ohjelmoinnin puussa verkoille joilla on pieni puuleveys
- ▶ Courcelle's theorem
- ▶ Bayesian inference
- ▶ Perfect phylogeny

Tehtäviä

Todistustehtäviä:

- ▶ Montako kaarta pitää lisätä n -sykliin että siitä tulee chordaalinen?
- ▶ On olemassa k -sykli, $k \geq 4$ jossa ei ole chordia \rightarrow ei ole täydellistä eliminaatiojärjestystä
- ▶ Voiko chordaaliseen verkkoon joka ei ole klikki lisätä aina kaaren niin että se säilyy chordaalisena?
- ▶ Mikä on $n \times m$ ruudukkon puuleveys?
- ▶ Ei ole k -sykliä, $k \geq 4$ jossa ei ole chordia \rightarrow on olemassa täydellinen eliminaatiojärjestys

Koodaustehtäviä (CSES):

- ▶ Chordaalisen verkon väritys, $n, m \leq 5 \cdot 10^5$
- ▶ Yleisen verkon puuleveys, $n \leq 10$ tai $n \leq 20$